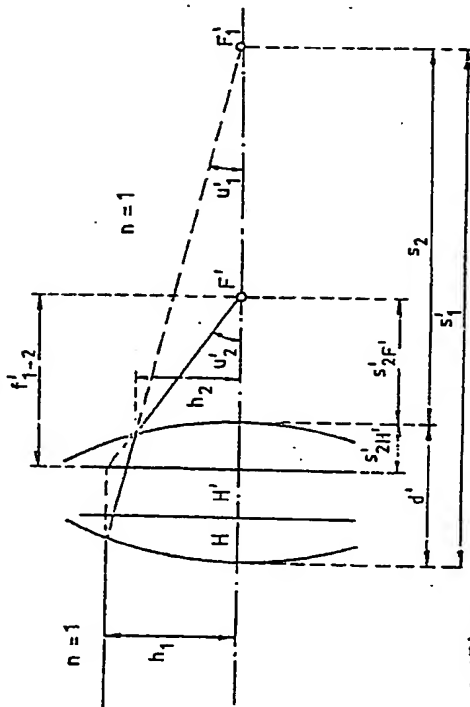


2.5. Abbildungsgleichungen und Kardinalpunkte von Einzellinsen

2.5.1. Dicke Linse in Luft

Bildseitige Kardinalpunkte

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten von Einzellinsen zusammengefaßt. Dabei werden die Linsen jeweils vom gleichen Medium umgeben. Wir setzen $n = 1$. Haben die an die Linsen angrenzenden Medien den gleichen Brechungsindex, so fallen die Objekt- und bildseitigen Knoten- und Hauptpunkte jeweils zusammen und werden mit H bzw. H' bezeichnet. Durch H und H' sind die Hauptebenen senkrecht zur optischen Achse aufgespannt.



(Abb. 2.15)

Durch Anwendung des Brechungsgesetzes von Systemen (2.13) auf die Einzellinse erhalten wir:

$$\begin{aligned} n_1 u_1' &= n_1 u_1 + h_1 D_1 & / u_1 &= 0 \\ h_2 &= h_1 - d' \cdot u_1' = h_1 - d' \cdot \frac{h_1 D_1}{n_1} \\ n_2 u_2' &= n_2 u_2 + h_2 D_2 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} n_2' = 1, \quad u_2 = u_1' \\ n_1' = n_2 = n \end{array} \right.$$

$$u_2' = (n u_1' + h_1 (1 - \frac{d' D_1}{n}) D_2)$$

$$u_2' = (n \cdot \frac{h_1 D_1}{n} + h_1 (1 - \frac{d' D_1}{n}) D_2)$$

$$u_2' = h_1 (D_1 + D_2 - \frac{d' D_1 D_2}{n}) ;$$

da aber

$$u_2' = \frac{h_1}{f_{1-2}'}$$

ist, folgt die Brennweite der dicken Linse f_{1-2}' :

$$\frac{1}{f_{1-2}'} = D_1 + D_2 - \frac{d' D_1 D_2}{n} \quad (2.15b)$$

Die Brechkkräfte hängen mit den Linsenradien nach der früheren Ableitung folgendermaßen zusammen:

$$D_1 = \frac{n-1}{r_1} \quad D_2 = \frac{1-n}{r_2}$$

Für die dünne Linse wird für $d' \rightarrow 0$:

$$\lim_{d' \rightarrow 0} \frac{1}{f_{1-2}'} = D_1 + D_2 = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Das ist eine Formel, welche vom Linsenhersteller vielfach gebraucht wird zur näherungsweise Bestimmung der Brennweite.

Bildseitige Kardinalpunkte

Die Bestimmung der Schnittweite, welche der Abstand vom letzten Linsenscheitel zum Bildpunkt ist, erfolgt aus der Beziehung:

$$\frac{h_1}{s_2 F'} = u_2' = \frac{h_1}{f_{1-2}'}$$

Durch Einsetzen von $h_2 = h_1 (1 - \frac{d' D_1}{n})$

und $u_2' = \frac{h_1}{f_{1-2}'}$

folgt:

$$\frac{1}{s_2 F'} = \frac{h_1}{f_{1-2}'} \cdot \frac{1}{h_1 (1 - \frac{d' D_1}{n})} \quad \left| \begin{array}{l} D_1 = \frac{n}{f_1'} \end{array} \right.$$

Die Schnittweite ist demnach

$$s'_{2F'} = f'_{1-2} \left(1 - \frac{d'}{f_1}\right) \quad \left| \quad \frac{1}{f_1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{f_1} \right.$$

$$s'_{2F'} = f'_{1-2} \left(1 - \frac{d'}{f_1} \cdot \frac{n-1}{n}\right) \quad (2.16)$$

Für den Abstand der bildseitigen Hauptebene vom Scheitel gilt:

$$s'_{2H'} = s'_{2F'} - f'_{1-2}$$

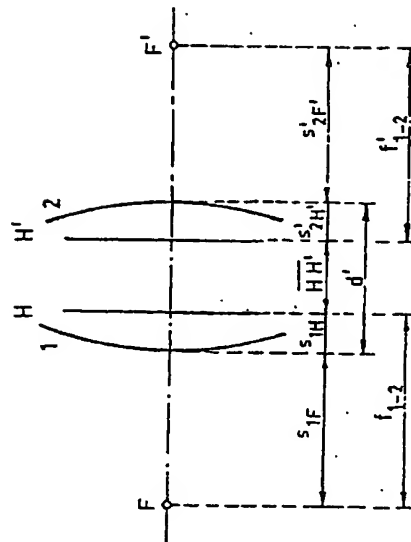
$$s'_{2H'} = - \frac{f'_{1-2} d'}{f_1} \quad (2.17)$$

Eingesetzt für f'_{1-2} und f_1 ergibt

$$s'_{2H'} = - \frac{f_1 \cdot d'}{R} \quad (2.18)$$

mit $R = n(r_2 - r_1) + d'(n-1)$.
Objektseitige Kardinalpunkte

Lichtrichtung



(Abb. 2.17)

Man findet die objektseitigen Kardinalpunkte am einfachsten, indem man die Regel für die Übertragung konjugierter Größen aus dem Bild- in den Objektraum anwendet. Man erhält:

$$s_{1F} = - f'_{1-2} \left(1 - \frac{d'}{f_2 \cdot n}\right) \quad (2.19)$$

Für das System in Luft gilt:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1-n}{r_2}$$

eingesetzt ergibt:

$$s_{1F} = - f'_{1-2} \left(1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d'}{r_2}\right) \quad (2.20)$$

Für s_{1H} erhält man durch die Übertragung vom Bild- in den Objektraum:

$$s_{1H} = s_{1F} + f'_{1-2} = \frac{f'_{1-2} \cdot d'}{f_2 \cdot n} = \frac{f'_{1-2} \cdot d'}{f_2 \cdot n} \quad (2.21)$$

oder:

$$s_{1H} = - f'_{1-2} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d'}{r_2},$$

welches analog zu vorher für s'_{2H} durch Einsetzen ergibt:

$$s_{1H} = - \frac{f_1 d'}{R} \quad \text{mit } R = n(r_2 - r_1) + d'(n-1).$$

Man findet also jetzt eine zweite Hauptebene H , da s_{1H} nicht mit s'_{2H} übereinstimmen kann. Bei der einzelnen brechenden Fläche lagen Objekt und Bild für $\beta = +1$ zusammen in H . Bei der dicken Linse ist $\beta = +1$, wenn das Objekt in H liegt. Dann befindet sich das Bild in H' .

Abstand der Hauptebenen

Der Abstand der beiden Hauptebenen ist:

$$\overline{HH'} = d' - s_{1H} + s_{2H'}$$

(2.22)

$$\overline{HH'} = d' \left[1 - \frac{d'}{n} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{n}{r_1} \right) \right]$$

In Radien ausgedrückt, ergibt dies:

$$\overline{HH'} = \frac{d'}{R} (n-1) (r_2 - r_1 + d)$$

$$R = n(r_2 - r_1) + d'(n-1)$$

Für die beiderseitig in Luft liegende Linse fallen Haupt- und Knotenpunkte zusammen!

Die Lage der Hauptpunkte ist proportional den Radien, nämlich:

$$\frac{s_{1H}}{s_{2H'}} = \frac{r_1}{r_2}$$

Beispiel: für $r_2 \rightarrow \infty$ $s_{1H} = 0$

Faustregel:

Die Hauptebenen wandern immer zum kleineren Radius hin (in Richtung der stärkeren Krümmung).

In der Abbildung sind einige Linsen mit den entsprechenden Hauptebenen aufgezeigt.

Es ist ersichtlich, daß beide Hauptebenen nur bei einer B1 - Linse (bikonvex Abb. a, bikonkav Abb. d) im Innern liegen können, weil die Radien r_1 und r_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben. Bei einer plankonvexen (b) oder plankonkaven (c) Linse liegt H bzw. H' im Scheitel der Krümmung.

LAGE DER HAUPTEBENEN

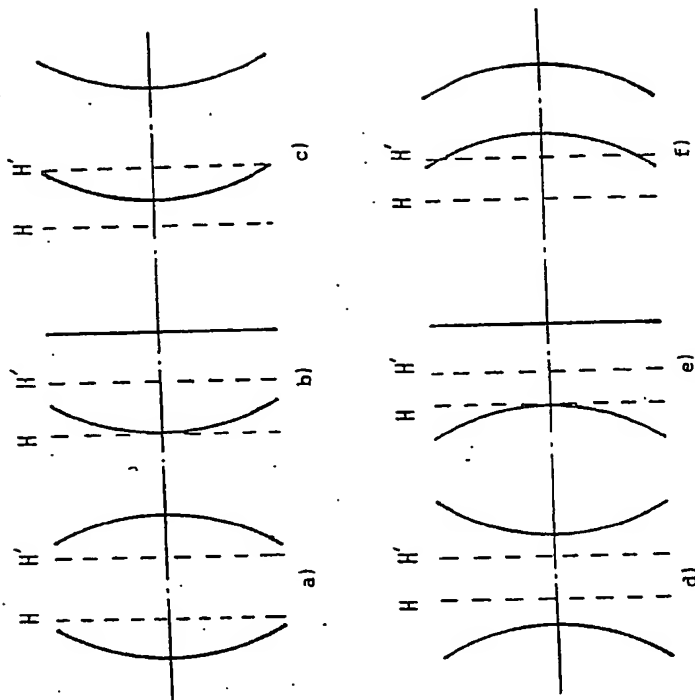
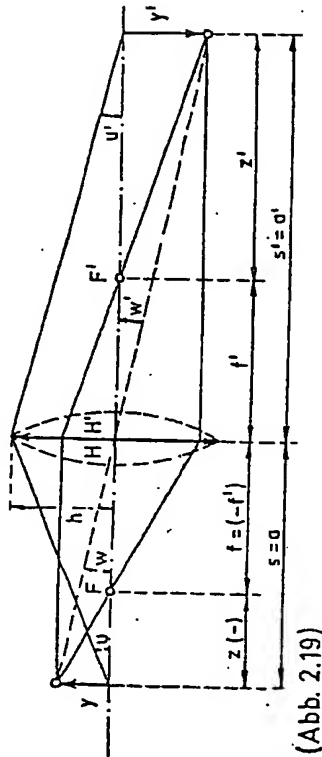


Abb. 2.18

2.5.2. Dünne Linse in Luft

2/27

Bei der dünnen Linse in Luft fallen nicht nur die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen, sondern auch die Hauptpunkte H und H' . Das Symbol für dünne Linsen ist:



Aus Abb. 2.19 läßt sich die Newtonsche Abbildungsgleichung ähnlich wie bei der Einzelfläche einfach herleiten:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{z'}{f'} = -\frac{f}{z},$$

wobei

$$f' = -f \quad \text{ist.}$$

$$z \cdot z' = -f'^2$$

(2.23)

(Newtonsche Abbildungsgleichung)

Aus derselben Skizze kann auch die Linsengleichung hergeleitet werden durch Einsetzen für $z = s-f$ bzw. $z' = s'-f'$. Sie kann aber auch aus Gl. (2.13) direkt geschrieben werden, da

$$u' = \frac{h}{s'} \quad \text{und} \quad u = \frac{h}{s} \quad \text{bzw. für die dicke Linse:}$$

$$u' = \frac{h}{a'} \quad u = \frac{h}{a} \quad \text{ist. Dividieren wir durch } h, \text{ so folgt}$$

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + D \quad \text{dünne Linse}$$

$$\frac{n'}{a'} = \frac{n}{a} + D \quad \text{dicke Linse}$$

$a, a' =$ Objekt- bzw. Bildabstand von den Hauptebenen.

2/28

Ist die dünne Linse in Luft, so gilt:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f'} \quad (2.24)$$

(Linsengleichung)

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \quad (2.25)$$

(lateraler Abbildungsmaßstab)

$$\alpha' = \beta' = \frac{dz'}{dz} \quad (2.26)$$

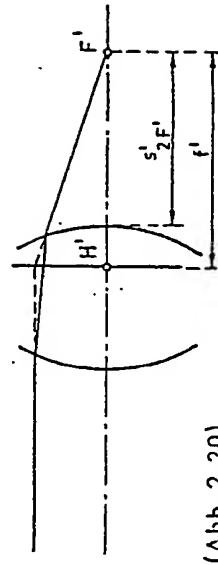
(Tiefenabildungsmaßstab)

Beweis durch Ableiten von (2.23) nach z

$$\alpha' = \frac{dz'}{dz} = \frac{f'^2}{z^2} = \frac{f'^2 \beta'^2}{f'^2} = \beta'^2$$

2.5.3. Zeichnerische Bestimmung der Bildlage und Größe

Aus den Linsendaten r_1, r_2, d folgen die Punkte F, H, H', F' durch Rechnung. Diese Punkte bilden in ihrer gegenseitigen Lage einen Ersatz für die Linse und man kann damit das Bild eines beliebigen Objektes rein konstruktiv ermitteln. So wie wir die Hauptebenen eingeführt haben, ergibt sich z. B. H' als Durchstoßpunkt der optischen Achse durch die Fläche, die man erhält, wenn man ankommenden und gebrochenen Strahl geradlinig durch das optische System verlängert, bis zu deren Schnittpunkt. Entsprechendes gilt für den objektseitigen Hauptpunkt H .



Da H' das Bild von H ist, verläuft ein Strahl, dessen Verlängerung durch H geht, nach der Brechung so, daß seine rückwärtige Verlängerung durch H' geht. Für Systeme in Luft fallen die

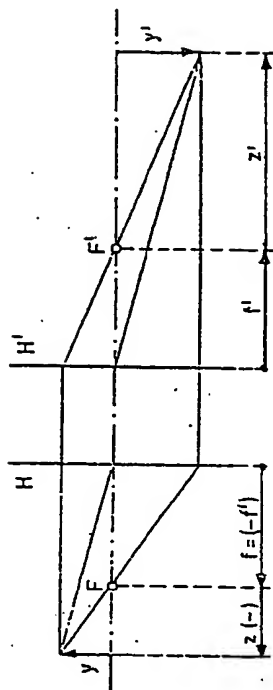
Hauptpunkte mit den Knotenpunkten zusammen und die beiden Strahlen durch H und H' sind zueinander parallel.

Somit hat man zur Konstruktion der Bildlage drei ausgezeichnete Strahlen zur Verfügung:

1. Achsparallel eintretender Strahl
2. Achsparallel austretender Strahl
3. Strahl durch die beiden Knotenpunkte
(in Luft \approx Hauptpunkte)

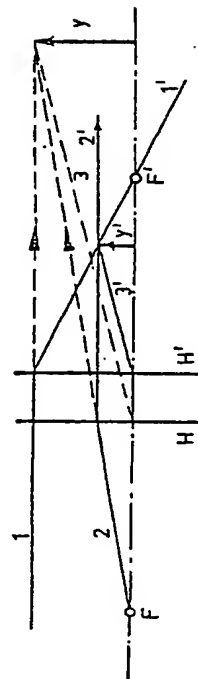
Zwischen H und H' verlaufen die Konstruktionsstrahlen immer parallel zur optischen Achse.

Beispiel: Reelle Abbildung durch Sammellinse



(Abb. 2.21)

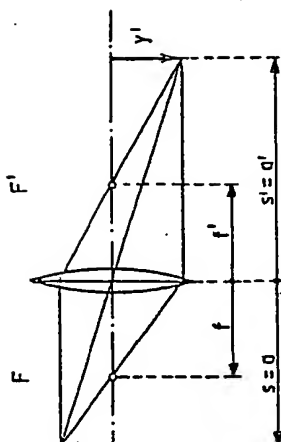
Beispiel: Das reelle Bild eines virtuellen Objektes durch eine Sammellinse (Objektpunkt O rechts von H).



(Abb. 2.22)

Spezialfall: Dünne Linse in Luft

Bei der dünnen Linse fallen H und H' zusammen. Die Konstruktion vereinfacht sich deshalb wie folgt:



(Abb. 2.23)

2.5.4. Spieglende Flächen

Bei Spiegelungen wird die Lichtrichtung umgekehrt. Wir können aber die gleichen Formeln wie bisher anwenden, wenn folgendes beachtet wird:

Die Abbesche Invariante (2.04) gilt, wenn

$$\frac{n'}{l'} = -\frac{n}{l}$$

geschrieben wird.

$$n' \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{s'} \right) = n \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{s} \right)$$

Durch die Unterscheidung von x und x' wird die Spiegelung berücksichtigt, dann wird für $n' = n$:

$$\frac{1}{s'} = \frac{2}{l} - \frac{1}{s} \quad \beta' = -\frac{s'}{s}$$

Setzen wir $n' = -n$, d. h., wir wechseln nach der Reflexion den Brechungsindex des Mediums n' , dann gelten die bisherigen Gleichungen.

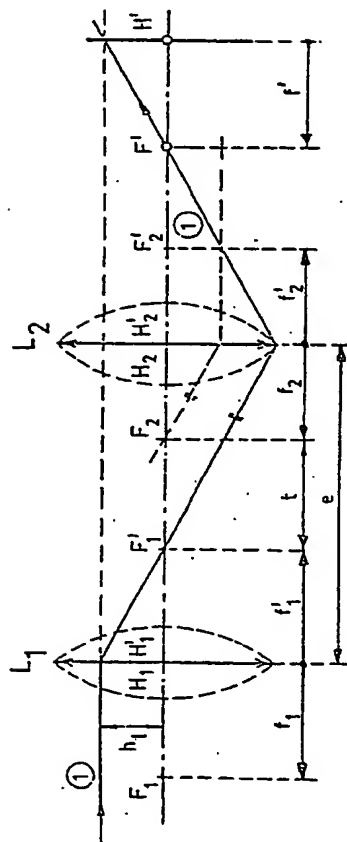
2.6. Linsensysteme aus zwei dünnen Linsen

2.6.1. Auffinden der Kardinalpunkte

Im folgenden werden optische Systeme aus dünnen Linsen aufgebaut. Jedes Einzelsystem besitzt nach dem Vorhergehenden einen bild- und

objektseitigen Hauptpunkt.

Diese werden jeweils zusammengefaßt zu einer dünnen Linse.



(Abb. 2.24)

e = Abstand der dünnen Linsen

t = optische Tubuslänge

Die Hauptebene durch H' des Gesamtsystems ergibt sich durch den Schnittpunkt der Verlängerung des achsparallelen Strahls mit dem durch die Linsen L_1 und L_2 gebrochenen. Die Brennweite des Gesamtsystems ergibt sich als $H'F' = f'$. Die Richtung des von der Linse L_2 gebrochenen Strahls finden wir durch Einzeichnen eines parallelen Hilfsstrahls durch F_2 (objektseitiger Brennpunkt von L_2). Der Hilfsstrahl verläuft nach L_2 wieder achsparallel und schneidet den Strahl 1 in der Brennebene durch F'_2 . Zur Berechnung der Gesamtbrennweite wenden wir unsere bekannte Formel für die Brechung an Einzelflächen an. An die Stelle der Einzelfläche treten jetzt die einzelnen dünnen Linsen mit den Brechkraften

$$D_1 = \frac{1}{f_1} \quad D_2 = \frac{1}{f_2}, \dots, \quad D_p = \frac{1}{f_p}$$

Die Distanzen der Linsen, die in Luft sind, sind mit e bezeichnet. Durch sinngemäßes Umformen der Formeln folgt:

$$u'_1 = u_1 + \frac{h_1}{f_1} \quad u_1 = 0 \quad D_1 = \frac{1}{f_1}$$

$$h_2 = h_1 - e \cdot u'_1$$

$$u'_2 = u_2 + \frac{h_2}{f_2} \quad u_2 = u'_1$$

Setzen wir jetzt $u_1 = 0$ für den achsparallelen Strahl, so folgt durch Einsetzen:

$$u'_2 = u'_1 + \frac{h_2}{f_2}$$

$$u'_2 = \frac{h_1}{f_1} + (h_1 - e \frac{h_1}{f_1}) \frac{1}{f_2}$$

Zur Destimmung der Gesamtbrennweite schreiben wir:

$$\frac{h_1}{f_2} = u'_2$$

somit

$$\frac{1}{f_2} = \frac{u'_2}{h_1}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}$$

Die Lage des Brennpunktes des Gesamtsystems bezogen auf L_2 ergibt sich aus der Beziehung

$$u'_2 = \frac{h_2}{s'_2 f'}$$

$$s'_2 f' = \frac{h_2}{u'_2} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_1} = \frac{h_2}{h_1} \cdot f'$$

$$s'_2 f' = (1 - \frac{e}{f_1}) f'$$

$$s_1 f' = -(1 - \frac{e}{f_1}) f'$$

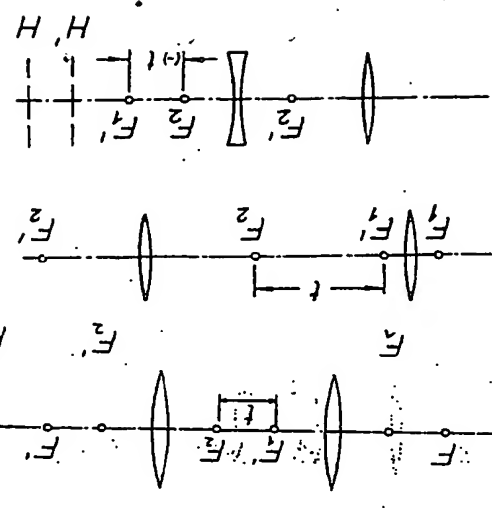
Die Hauptpunktweiten sind

$$s'_2 H' = -\frac{e \cdot f'}{f_1} ; \quad s_1 H = \frac{e \cdot f'}{f_2}$$

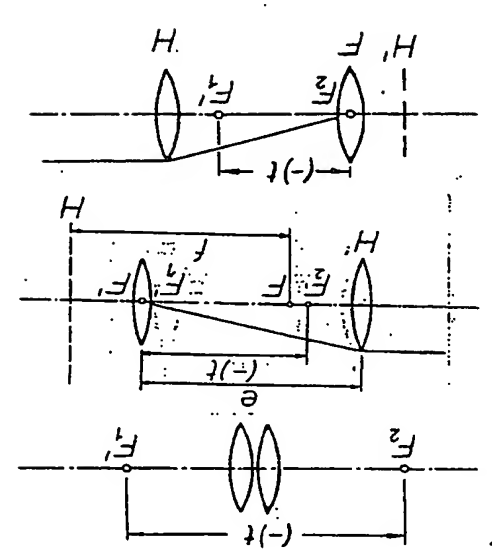
2.6.2. Verschiedene Anordnungen von dünnen Linsen

Verschiedene Variationsmöglichkeiten für Systeme aus zwei dünnen Linsen zeigen die folgenden Skizzen. Es entstehen bestimmte Typen von Anordnungen mit charakteristischen Strahlengängen.

	f'_1	f'_2	e	t	f'	S_{1H}	S'_{2H}	!
5	+	f'_1	$f'_1 + f'_2$	0	∞	∞	∞	afokales System
6	+	f'_1		+	-	-	+	Mikroskoptyp
7	+	$> + f'_1$		+	-	-	+	Mikroskop
8	+	-	-	-	+	+	+	



	f'_1	f'_2	e	t	f'	S_{1H}	S'_{2H}	!
1	+	+	0	-	+	0	0	0
2	+	+	$\frac{e}{2} - e$	$f'_1 - f'_2$	f'_1	$\frac{e}{2} - e$	$\frac{f'_1}{2} - \frac{f'_2}{2}$	
3	+	+	$f'_2 - f'_1 - e$	$f'_1 - f'_2 - e$	f'_1	$\frac{f'_1}{2} - \frac{f'_2}{2}$	$\frac{f'_1}{2} - \frac{f'_2}{2}$	sammelnde Systeme
4	+	+	$< f'_1 + f'_2$					




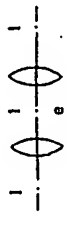
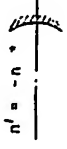
	f_1'	f_2'	e	t	f'	s_{1H}'	s_{2H}'	i
9	+	-	0	∞	∞	∞	∞	afokales System
10	+	-	+	+	+	-	-	Telesystem
11	+	$-f_1'$	t	e	$e \frac{f_1'}{f_1' - f_1'}$	$-f_1' - f_1'$	$e \frac{f_1' - f_1'}{f_1' - f_1'}$	

$-f_1' = f_2'$

GAUß'SCHE OPTIK ÜBERSICHT LINSEH. UND SPIEGEL	$\frac{n}{n'}$	$\frac{n'}{n}$	$\frac{n}{n'}$
Einzel­fläche	$\frac{n'}{n}$	$\frac{n}{n'}$	$\frac{n}{n'}$
Abbe-Invariante	$n'(\frac{1}{f} - \frac{1}{s}) = n(\frac{1}{f'} - \frac{1}{s'})$		
Helmholtz-Invariante	$n'y'd' = nyu = H$		
Scheitelpunktsgl. bzw. Hauptpunktsgl.	$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{f'}$ vobei: $\frac{1}{f'} = \frac{n}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{d}{f_1' \cdot f_2'}$		
Brennweite : bildseitig f'	$\frac{n'}{f'} = \frac{n}{f}$		
Brennweite:objektseitig f	$\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$		
Zusammenh.d.Brennw.	$\frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$		
Newton'sche Abbglg.	$zz' = ff' = -f^2$		
Abbild.Maßstab	$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{n}{n'}$		
Abbild.Maßstab	$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$		
Winkelverhältnis	$\gamma' = \frac{u'}{u} = \frac{s}{s'} = \frac{n}{n' \cdot \beta'}$		
Tiefenverhältnis	$\alpha' = \frac{dz'}{dz} = \frac{n'}{n} \cdot \beta'^2$		
Newton'sche Bildgröße y'	$y' = x'_{AP-Bild} \cdot w'$		
Objektseit.Brennpunkt s_{1F}	$s_F = f$		
Bildseit.Brennpunkt s_{2F}'	$s_{F'} = f'$		
Objektseit.Hauptpunkt s_{1H}	0		
Bildseit.Hauptpunkt s_{2H}'	0		
Abstand d. Hauptpunkte HH'	-		

Literatur zu Kap. 1 und 2

- 1 | Schröder, G.: Technische Optik. Vogel-Verlag, Würzburg (1998)
- 2 | Bass, M.: Handbook of Optics. Mc Graw Hill (1995)
- 3 | Born, M.; Wolf, E.: Principles of Optics. Cambridge University Press (1999)
- 4 | Haferkorn, H.: Optik. Barth (1994)
- 5 | Hecht, E.: Optik. Oldenbourg (2001)
- 6 | Köhlke, D., Optik. Harri Deutsch (1998)
- 7 | Lipson, S.; Lipson H.: Optik. Springer (1997)
- 8 | Naumann, H., Schröder, G.: Bauelemente der Optik. Hanser (1992)
- 9 | Slevogt, H.: Technische Optik. Gruyter, Sammlung Göschen, Band 9002 (1974)
- 10 | Warren J. Smith's: Modern Optical Engineering. Mc Graw Hill (2000)

	Dünne Linse in Luft 	Zwei dünne Linsen in Luft 	Sphärischer Spiegel in Luft 
s', a'	$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f'}$ $a'as'; a \approx s$	$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f'}$ wobei: $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 \cdot f_2}$	$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{f'}$ (mit $n' = -n$) $\frac{1}{s'} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{f'}$
f'	$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$	$\frac{1}{f'} = -\frac{t}{f_1 f_2}$	$\frac{1}{f'} = \frac{2}{r}$
f	$\frac{1}{f} = -(n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$		$\frac{1}{f} = \frac{2}{r}$
f, f'	$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$	$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$	$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f}$
zz'	$zz' = ff' = -f'^2$	$zz' = ff' = -f'^2$	$zz' = ff'$
β'	$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$	$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$	$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$
β'	$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$	$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$	$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$
y'	$y' = \frac{u'}{u} = \frac{s}{s'} = \frac{1}{\beta'}$	$y' = \frac{u'}{u} = \frac{s}{s'} = \frac{1}{\beta'}$	$y' = \frac{u'}{u} = \frac{1}{\beta'}$
α'	$\alpha' = \frac{dz'}{dz} = \beta'^2$	$\alpha' = \frac{dz'}{dz} = \beta'^2$	$\alpha' = \frac{dz'}{dz} = -\beta'^2$
y'	$y' = I' \cdot \text{AP-Bild} \cdot W'$	$y' = I' \cdot \text{AP-Bild} \cdot W'$	$y' = I' \cdot \text{AP-Bild} \cdot W'$
s_{1P}	$s_{1P} = f$	$s_{1P} = f - \frac{ef}{f_2}$	$s_P = f$
$s_{2P'}$	$s_{2P'} = f'$	$s_{2P'} = f' - \frac{ef'}{f_1}$	$s_{P'} = f'$
s_{1H}	0	$s_{1H} = -\frac{ef}{f_2} = -\frac{ef'}{f_1} = -\frac{e}{t}$	0
$s_{2H'}$	0	$s_{2H'} = -\frac{ef'}{f_1} = -\frac{ef}{f_2} = -\frac{e}{t}$	0
$\overline{HH'}$	0	$\overline{HH'} = e \left(1 - f' \left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right] \right) = \frac{e}{t}$	-